

15.01.2008

27 Серединный перпендикуляр к отрезку и биссектриса угла

Не любо — не слушай, а врать не мешай.

Опр. Перпендикуляр к отрезку называется *серединным*, если он проходит (о, чудо!) через его середину.

Теорема (*характеристическое свойство серединного перпендикуляра к отрезку*).

Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB тогда и только тогда, когда $MA = MB$.

По-другому, серединный перпендикуляр к отрезку — это г. м. т., равноудалённых от концов этого отрезка.

Теорема (*характеристическое свойство биссектрисы угла*).

Биссектриса угла — это г. м. т., равноудалённых от сторон этого угла (и лежащих внутри угла).

Софизм «Все треугольники равнобедренные».

Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$. Пусть для определённости $AB < BC$. Отметим точку O пересечения серединного перпендикуляра к стороне AC и биссектрисы $\angle B$ (рис. 1). Из точки O опустим перпендикуляры OD и OE на боковые стороны.

- 1) $OA = OC$ (OM — серединный \perp)
- 2) $OD = OE$ (BO — биссектриса)
- 3) $\triangle OAD = \triangle OCE$ (почему?) \Rightarrow
 $\Rightarrow AD = CE$
- 4) $\triangle OBD = \triangle OBE$ (почему?) \Rightarrow
 $\Rightarrow BD = BE$

Таким образом, $AB = BC$ как суммы равных отрезков (из 3 и 4).

Где же ошибка?

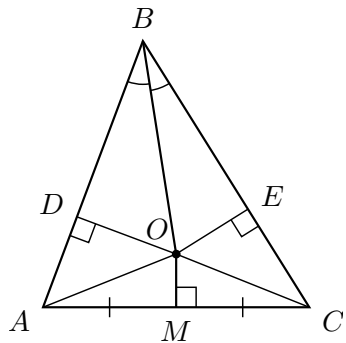
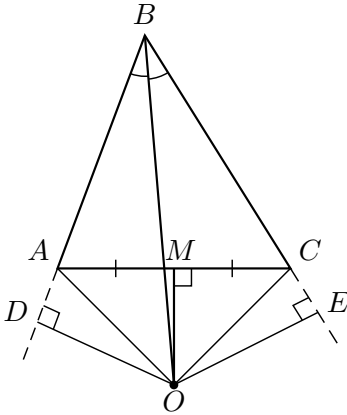


Рис. 1

Ошибка в чертеже! На самом деле биссектриса угла не может пересечься с данным серединным перпендикуляром внутри треугольника.

Вывод. Биссектриса угла треугольника пересекается с срединным перпендикуляром к противоположной стороне *вне* треугольника.

Продолжая жульничество, «докажем», что и в этом случае треугольник ABC — равнобедренный (рис. 2).



- 1) $OA = OC$ (OM — серединный \perp)
- 2) $OD = OE$ (BO — биссектриса)
- 3) $\triangle OAD = \triangle OCE \Rightarrow AD = CE$
- 4) $\triangle OBD = \triangle OBE \Rightarrow BD = BE$

Таким образом, $AB = BC$ как разности равных отрезков (из 3 и 4).

Попробуйте найти ошибку теперь.

Рис. 2

Ошибка опять в чертеже! На правильном чертеже точка D лежит на продолжении стороны BA , а точка E — на самой стороне BC .

Задача. В треугольнике ABC ($AB \neq BC$) проведены медиана BM , биссектриса BL и высота BH (рис. 3). Докажите, что биссектриса лежит между медианой и высотой (т. е. точка L лежит между M и H).

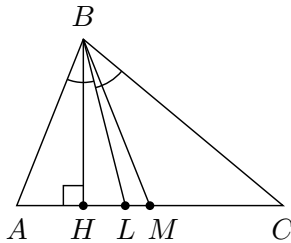


Рис. 3

Указание. Пусть $AB < BC$. То, что точка L лежит левее M , мы уже доказали. Докажите, что точки L и M лежат правее H .