

## Графы

7 класс • 16 декабря

*Вставайте, граф: вас ждут великие дела!*

1. В стране Цифра есть 9 городов с названиями «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9». Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города «1» в город «9»?
2. Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
3. Существуют ли государства, в которых 9 городов, а количества дорог, выходящих из города, соответственно равны:  
а) 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1;    б) 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1;  
в) 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1;    г) 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2?
4. В шахматном турнире участвовало 7 школьников. Двое из них сыграли по 3 партии, трое по 4 и двое по 5. Сколько всего было сыграно партий?
5. В государстве из каждого города выходит 4 дороги. Всего 100 дорог. Сколько городов?
6. (**Лемма о рукопожатиях.**) Докажите, что число людей, когда либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

По-другому:

**Теорема.** Число нечётных вершин любого графа — чётно.

7. Можно ли в клетчатой таблице  $7 \times 7$  отметить некоторые клетки так, чтобы любая клетка таблицы граничила по стороне ровно с одной из отмеченных клеток?

*Для домашнего обдумывания*

8. В компании из 7 человек каждый знаком с 4 другими. Докажите, что среди них можно выбрать троих попарно знакомых друг с другом.