

## Принцип Дирихле

7 класс • 25 ноября

- Так. Если я что-нибудь в чём-нибудь понимаю, то дыра — это нора...
- Ага.
- А нора — это кролик...
- Ага!
- А кролик — это подходящая компания.  
М/ф «Винни-Пух»

**Принцип Дирихле:** если в  $N$  клетках сидят не менее  $N + 1$  кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

1. В лесу растёт миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две ёлки с одинаковым числом иголок.
2. В Самаре живёт более 1 миллиона человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове не более 400000 волос.
3. Дано 8 различных целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 7.
4. На краю круглого стола расположены на одинаковом расстоянии друг от друга  $N$  флагов стран, за столом сидят  $N$  послов этих стран, причём каждый посол сидит рядом с чужим флагом. Докажите, что существует такое вращение стола, после которого хотя бы два посла окажутся рядом с флагом своей страны.

**Обобщённый принцип Дирихле:** если  $kN + 1$  кроликов размещены в  $N$  клетках, то найдутся  $k + 1$  кроликов, которые посажены в одну клетку.

5. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трёх сортов, причём в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?
6. В прямоугольнике  $5 \times 6$  закрашено 19 клеток. Докажите, что в нём можно выбрать квадрат  $2 \times 2$ , в котором закрашено не менее трёх клеток.

7. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.
8. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.
9. Докажите, что если имеется 10 целых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , то из них можно выбрать несколько чисел (может быть, одно), сумма которых делится на 10.

*Для самостоятельного решения*

10. В ковре размером  $4 \times 4$  метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера  $1 \times 1$  метр, в котором нет ни одной дырки.
11. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.
12. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2007.
13. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

*Для домашнего обдумывания  
(к следующему занятию)*

14. Можно ли расставить на шахматной доске 17 королей так, чтобы они не били друг друга?
15. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.
16. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдётся свободный уголок из трёх клеток.
17. Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.