



Принцип крайнего

6 класс • 2 февраля

Моя хата с краю — ничего не знаю.

Идея 1. Нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший) объект.

1. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что найдётся ладья, бьющая не более двух других.
2. 8 грибников собрали 37 грибов, причём никакие двое не собрали поровну. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.
3. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причём каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

Идея 2. Узкое место. Крайними свойствами может обладать и объект, с виду расположенный в середине.

4. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы разность любых двух соседних чисел (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?
б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

Идея 3. Цепочку рассуждений выгодно начать с края, с узкого места.

5. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2 .
6. В 100-угольнике длина каждой стороны равна полусумме длин соседних сторон. Докажите, что длины всех сторон равны.
7. 25 астрономов на двадцати пяти разных планетах наблюдают друг за другом, причём каждый наблюдает за ближайшим к нему (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Докажите, что а) есть две планеты, астрономы которых наблюдают друг за другом; б) хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.

Для домашнего обдумывания

8. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 11 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была равна либо 2, либо 3?
б) То же самое, но числа надо выписать по кругу.
9. Во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены крестики и нолики с выполнением следующего условия: у каждого крестика среди соседей больше крестиков, чем ноликов (соседними считаются все клетки, имеющие с рассматриваемой хотя бы одну общую точку). Докажите, что крестиков бесконечно много.