Муниципальное образовательное учреждение
повышения квалификации
Центр развития образования
г. Самара

Клуб одарённых школьников
Математический Гуру
при Центре развития образования

Подготовительные задачи

к вступительной олимпиаде городского математического кружка

6-й класс (2006/07 уч. год)

www.mathguru.ru

Самара
2006

Составитель: *Савин А. Н.*

Подготовительные задачи к вступительной олимпиаде городского математического кружка, 6-й класс. — 2006.

Данная брошюра содержит 16 задач, направленных на воспитание гибкости математического мышления и развитие инициативы и сообразительности. Брошюра рассчитана в основном на учащихся 5–6 классов.

Электронная версия данной брошюры размещена на сайте **www.mathguru.ru** (раздел «Математический кружок»).

Предисловие для учителей

Прежде всего, эта брошюра адресована школьникам 6-го класса, которые любят и умеют решать математические задачи. Если кто-то из Ваших учеников отличается удивительной сообразительностью и желанием заниматься математикой, покажите ему (ей) эту брошюру. Электронную версию можно скачать с сайта www.mathguru.ru в формате MS Word или PDF и распечатать самостоятельно. Заинтересовавшиеся ученики приглашаются в ЦРО на вступительную олимпиаду городского математического кружка.

Особо талантливые ученики 5-го класса тоже могут поступить в группу кружка 6-го класса. Поскольку кружковая тематика почти не имеет пересечений со школьной программой, пятиклассники не будут ощущать нехватку знаний. Лишь в редких случаях потребуется изучение некоторых тем наперёд (например, отрицательные числа и сложение дробей). Чуть тяжелее придётся в следующем учебном году, когда в 7-м классе начнётся геометрия.

Предисловие для школьников

Дорогой друг! Клуб «Математический Гуру» объявляет набор в городской математический кружок. Если тебе нравится решать математические задачи и головоломки, и ты хочешь посещать математический кружок, эта книжка для тебя. Она поможет подготовиться к вступительной олимпиаде кружка. Только одно условие: задачи нужно решать самостоятельно. Если какая-то задача не получается, лучше её отложить на завтра, а не пытаться сразу смотреть указание к решению. В эту табличку ставь плюсики для решённых задач. Если наберёшь 6–7 плюсиков — это очень хороший результат.

Задачи, которые я решил сам (решила сама)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

15 сентября в 16:00 часов мы будем разбирать решения этих задач в Центре развития образования (см. схему проезда на последней странице). Приглашаются школьники и учителя.

17 сентября в 10:00 часов состоится вступительная олимпиада.

1. Поворот монеты

Одна монета лежит неподвижно, а другая такая же монета катится вокруг неё. Сколько раз подвижная монета обернётся вокруг своего центра, прежде чем вернётся в исходное положение?

Обязательно представьте движение монеты мысленно и только затем проведите эксперимент!

2. Встретились три охотника…

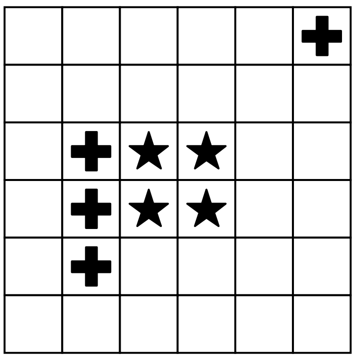
Встретились три охотника и сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй — одну, а у третьего крупы не было. Но зато он дал товарищам 5 патронов в качестве платы за кашу. Все ели поровну. Как следует разделить патроны между первым и вторым охотниками?

3. Разноцветные перчатки

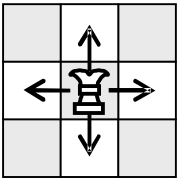
В ящике в беспорядке валяются 6 пар чёрных, 6 пар коричневых и 7 пар серых перчаток. Сколько перчаток нужно вытащить наугад, чтобы среди них заведомо можно было выбрать: а) пару перчаток одного цвета; б) пару перчаток чёрного цвета?

4. Разрежьте квадрат!

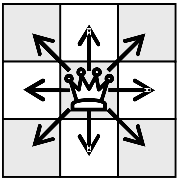
Разрежьте данный квадрат вдоль линий на 4 части одинакового размера и одной формы так, чтобы каждая из частей содержала по звёздочке и по крестику.



5. *Ладья и ферзь*



Ладья



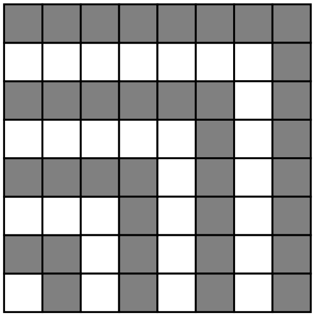
Ферзь

В шахматах ладья и ферзь могут ходить на любое число клеток в направлениях, показанных на рисунке. Шахматная доска имеет размеры 8×8 клеток.

а) Докажите, что на какой бы клетке шахматной доски ни стояла ладья, она всегда бьёт 14 других клеток.

б) Куда нужно поставить ферзя, чтобы он бил наибольшее число клеток?

6. *Квадратные суммы*



Последовательно складывая нечётные числа, мы каждый раз получаем квадрат натурального числа:

$1 = \mathbf{1}$

$1 + 3 = \mathbf{4}$

$1 + 3 + 5 = \mathbf{9}$

$1 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{16}$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \mathbf{36}$

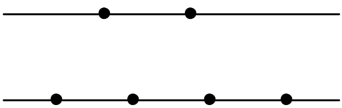
…………………………

Обоснуйте эту закономерность, глядя на изображённый на рисунке квадрат, составленный из уголков.

Чему равна сумма чисел $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2005 + 2007$?

7. *Сколько треугольников?*

На двух параллельных прямых расположены шесть точек: две точки — на верхней, четыре точки — на нижней. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно нарисовать?



8. Корова, коза и гусь

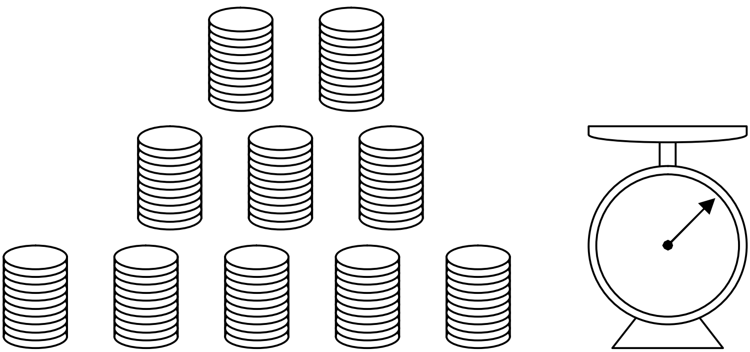
Некий фермер выяснил, что его корова и коза съедают на лужайке траву за 45 дней, корова и гусь — за 60 дней, а коза и гусь — за 90 дней. Если он выпустит одновременно на поле корову, козу и гуся, то за сколько дней они съедят на лужайке всю траву?

(Предполагается, что из-за неблагоприятных погодных условий трава на лугу не растёт во время поедания.)

9. Фальшивые монеты

Имеется 10 кучек монет по 10 монет в каждой. Одна из кучек целиком состоит из фальшивых монет, но какая именно — неизвестно. Известен лишь вес настоящей монеты, и, кроме того, установлено, что каждая фальшивая монета на один грамм тяжелее, чем нужно. Монеты можно взвешивать на пружинных весах.

Какое минимальное число взвешиваний необходимо произвести, чтобы отыскать кучку, целиком состоящую из фальшивых монет?



10. Числа по кругу

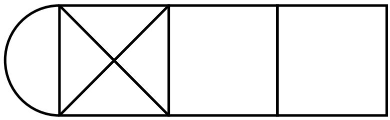
Можно ли расставить числа 1, 2, 3, …, 9 по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. Дорога в школу

Однажды Буратино вышел из дома в школу. Половину всего времени, затраченного на дорогу, он шёл со скоростью 5 км/ч, а затем шёл со скоростью 4 км/ч и пришёл точно к звонку. На другой день он шёл первую половину всего пути от дома до школы со скоростью 5 км/ч, а вторую — со скоростью 4 км/ч. Успел ли он вовремя?

12. «Классики»

Для одной из разновидностей популярной игры «классики» на земле рисуется изображённая здесь фигура. Нарисуйте такую фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии.



13. Сколько весит мальчик?

Мальчик и поросёнок весят столько, сколько 5 ящиков. Поросёнок весит столько, сколько 4 кошки. 2 кошки и поросёнок весят столько, сколько 3 ящика. Сколько кошек уравновесят мальчика?

14. Набор карточек

На столе лежат карточки (см. рисунок). Можно ли убрать двенадцать карточек так, чтобы сумма чисел на оставшихся была равна 50?

11	23	13	5	23
21	15	7	35	29
15	27	3	1	17

15. Разные фигуры — равные периметры

Разрежьте квадрат со стороной 12 м на четыре различные фигуры, периметр каждой из которых равен 40 м?

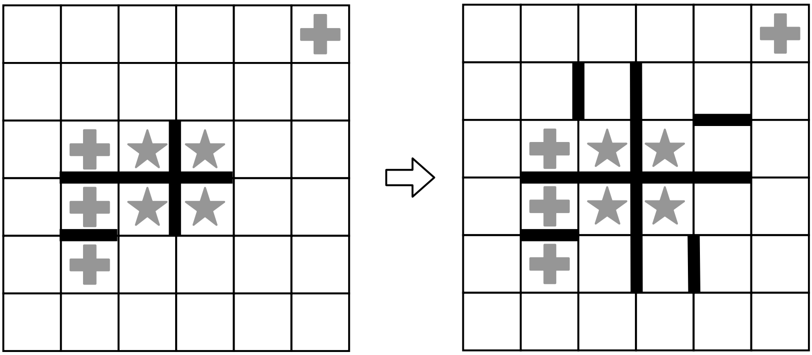
16. Сумасшедшие мухи

Две мухи Машка и Наташка сели в полдень на стрелки часов (Машка — на часовую, Наташка — на минутную) и поехали таким образом: если какая-то стрелка обгоняет другую, то Машка и Наташка, сидящие на этих стрелках, меняются местами. Сколько кругов проедет каждая из них до полуночи, и на какой стрелке каждая из мух приедет на финиш?

Указания к решению некоторых задач

2. Ответ: все патроны нужно отдать первому охотнику.

4. Давайте будем постепенно строить перегородки, образующие линии разреза. Между каждыми двумя рядом стоящими звёздочками должна быть перегородка, иначе эти две звёздочки окажутся в одной части. Аналогично, для крестиков. Полагая, что от центра будут идти четыре одинаковые линии разреза, построим ещё несколько «симметричных» перегородок (см. рисунок). Как же дальше?



7. Ответ: 16 треугольников.

8. Ответ: за 40 дней. За один день корова и коза съедают $\frac{1}{45}$ всей травы, корова и гусь — $\frac{1}{60}$ часть, а коза с гусём — $\frac{1}{90}$ часть. Если выпустить на луг одновременно две коровы, две козы и два гуся, какую часть травы они съедят за день? Смотрите:

$$\underbrace{\text{корова 1, коза 1}}_{\frac{1}{45}\text{ часть}},\ \underbrace{\text{корова 2, гусь 1}}_{\frac{1}{60}\text{ часть}},\ \underbrace{\text{коза 2, гусь 2}}_{\frac{1}{90}\text{ часть}}.$$

Получается, $\frac{1}{45}+\frac{1}{60}+\frac{1}{90}=\frac{1}{20}$ часть травы съедят вместе две коровы, две козы и два гуся за день. Сколько же тогда травы съедят вместе одна корова, одна коза и один гусь за день?

9. Интересно, можно ли обойтись одним взвешиванием?

10. Ответ: можно. Покажите, как нужно расположить числа.

14. Может ли сумма трёх нечётных чисел быть равна 50?

15. Сначала режем на 4 равные полоски 3×12 м. Периметр полоски 30 м. Маловато! Между первой и второй полоской добавляем 5 зубчиков «глубиной» в одну клетку. Каждый зубчик увеличивает периметр на 2 м. Между третьей и четвертой полоской тоже делаем 5 зубчиков. Как?

16. Это, пожалуй, самая трудная задача. Заметим, что хотя минутная стрелка иногда обгоняет часовую, мухи никогда не обгоняют друг друга.

Сроки проведения

15 сентября в 16:00 часов — разбор подготовительных задач.
17 сентября в 10:00 часов — вступительная олимпиада.

Место проведения

Адрес Центра развития образования: ул. Ново-Вокзальная, 213 (пересечение с Московским шоссе).

Схема проезда.